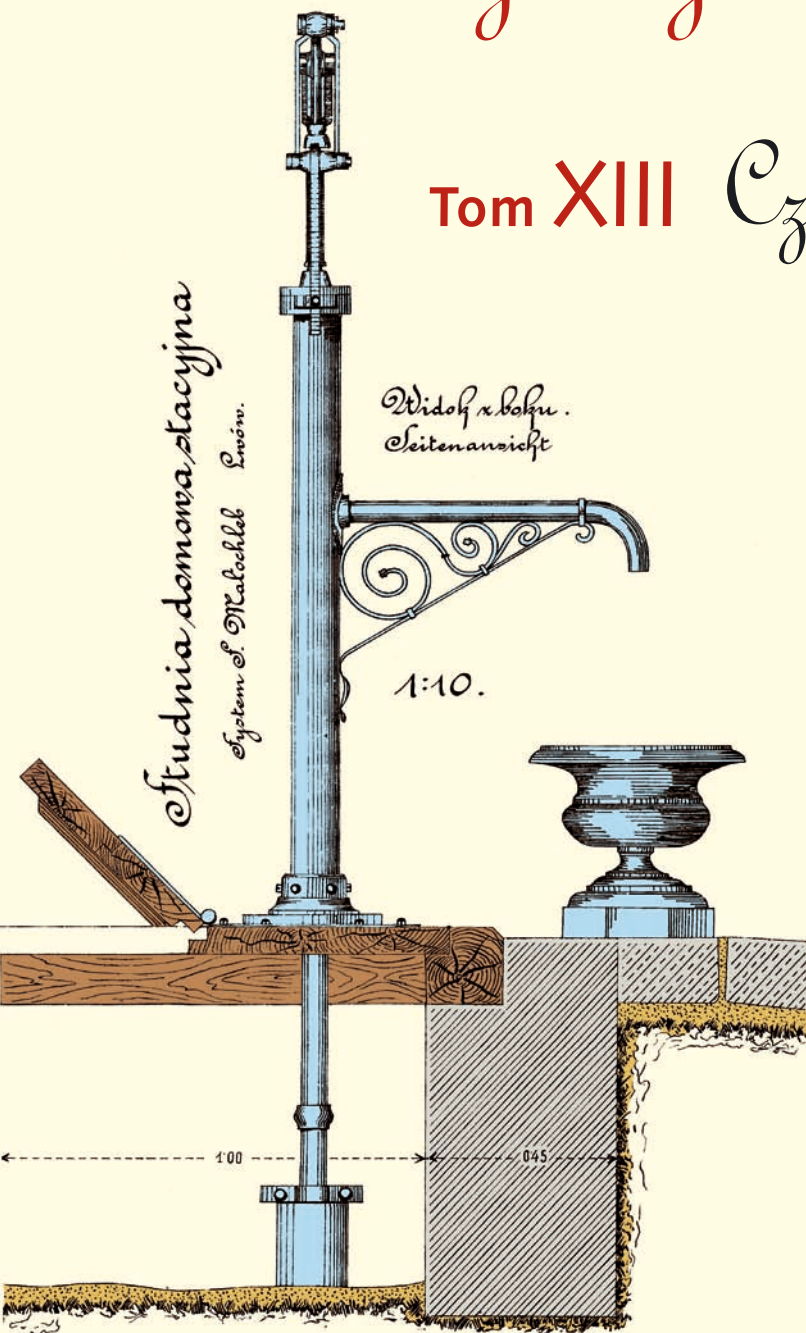


Współczesne problemy hydrogeologii

Tom XIII Część 3.





Wydanie publikacji zostało sfinansowane przez
Narodowy Fundusz Ochrony Środowiska
i Gospodarki Wodnej

Recenzenci:

Jadwiga Szczepańska
Wojciech Ciężkowski
Józef Górski
Andrzej Kowalczyk
Ewa Krogulec
Grzegorz Malina
Jerzy Małecki
Marek Marciniak
Jacek Motyka
Marek Nawalany
Jan Przybyłek
Andrzej Rózkowski
Andrzej Sadurski
Andrzej Szczepański
Stanisław Staško
Stanisław Witczak
Andrzej Zuber

Redakcja: Andrzej Szczepański, Ewa Kmiecik, Anna Żurek

Teksty artykułów w częściach 2. i 3. zostały wydrukowane z wersji elektronicznej dostarczonej przez Autorów, metodą bezpośredniej reprodukcji (*camera ready*)

Projekt okładki i stron tytułowych: Andrzej Tomaszewski

Na okładce: fragment projektu studni miejskiej we Lwowie z 1906 roku
— ze zbiorów prof. **Antoniego S. Kleczkowskiego** (1922–2006)

Korekta: Zespół

Skład komputerowy systemem $\text{T}_{\text{E}}\text{X}$: pre $\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ t, www.pretext.com.pl

Druk: ROMA-POL, www.romapol.pl

ISBN-13 978-83-88927-16-4

Stanisław Żak

Rozwiązanie dopływu wody do studni metodą różnic skończonych w logarytmiczno-walcowym układzie współrzędnych

Solution of Water Inflow to Well by the use of Finite Differential Method in Logarithm-Cylindric Coordinate System

Słowa kluczowe studnia, metoda różnic skończonych, przepływ ustalony, Excel

Key words well, finite difference method, steady-state flow, Excel

Abstract Paper presents the method of numerical solution of steady-state flow of water into well made in a layer with confined groundwater surface by the use of finite difference method. The solution embrace groundwater flow in an orthotropic aquifer in conditions of flow into incomplete well supplied from upper and lower located layers. Recharge may have a constant value or may be the linear function with respect to the largeness of depression cone caused by the well exploitation. The solution is related to the axis-symmetrical groundwater flow into a well and it is based on the equation of groundwater flow in logarithm-cylindric coordinate system. Solution in previously defined coordinate system assures very high precision of calculations with not very dense discrete grid. On the base of proposed method author made a computer code in Excel spreadsheet, which uses iteration method of calculations. Computer program enables calculation of groundwater flow into well, range of depression cone, permeability coefficient, it also generates plots of groundwater surface situation and hydraulic gradient as a function of distance from the well. This computer code is free accessible at www.ig.pwr.wroc.pl/zaklady/ZGiWM as `studniazwnap.xls`.

1. Wprowadzenie

Podstawowe równanie laminarnego przepływu cieczy nieściśliwej w nieodkształcalnej, jednorodnej i ortotropowej warstwie wodonośnej przy założeniu, że kierunki osi współrzędnych pokrywają się z osiami głównymi tensora wodoprzepuszczalności ma postać:

$$k_{xx} \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + k_{yy} \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} + k_{zz} \frac{\partial^2 H}{\partial z^2} = 0, \quad (1)$$

gdzie: k_{xx} , k_{yy} , k_{zz} – wartości współczynnika filtracji odpowiednio w kierunku x , y , i z ; H – wysokość hydrauliczna.

W przypadku rozwiązywania dopływu do pojedynczej studni, bardzo często korzysta się z równania przepływu we współrzędnych walcowych (r , φ , z). Zakładając, że w płaszczyźnie poziomej współczynnik filtracji ma wartość niezależną od kierunku, tj. $k_{xx} = k_{yy} = k_{rr}$ (warstwa wodonośna jest ortotropowa cylindrycznie) oraz przepływ jest osiowo-symetryczny, równanie (1) przedstawia się w postaci:

$$k_{rr} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial H}{\partial r} \right) + k_{zz} \frac{\partial^2 H}{\partial z^2} = 0 \quad (2)$$

Dla pionowej studni dogłębianej, zasilanej bocznie, ujmującej wodę z warstwy wodonośnej o napiętym zwierciadle wody i stałej miąższości, która jest zafiltrowana na pobocznicy wzdłuż całej miąższości warstwy wodonośnej istnieje analityczne rozwiązanie równania (2) (Dupuit'a). Jeśli jednak dopływ do studni odbywa się na mniejszym odcinku niż miąższość warstwy wodonośnej lub jeśli zachodzi zasilanie warstwy wodonośnej poprzez jej strop lub spąg, rozwiązanie dopływu do studni dokonuje się najczęściej przyjmując tzw.

aprosymację Dupuit, $\frac{\partial H}{\partial z} = 0$, lub metodami numerycznymi. Większość praktycznych

zastosowań bazuje na analitycznych rozwiązaniach z uwzględnieniem aproksymacji Dupuit (Dąbrowski i in., 2004, Ferris i in., 1989, Franke i in., 1987). Na takich rozwiązaniach oparte są również w większości specjalistyczne programy komputerowe, za pomocą których określa się właściwości hydrogeologiczne skał, np. oprogramowanie AquiferTest (Röhlich, 2001, Kasztelan, Przybyłek, 2005).

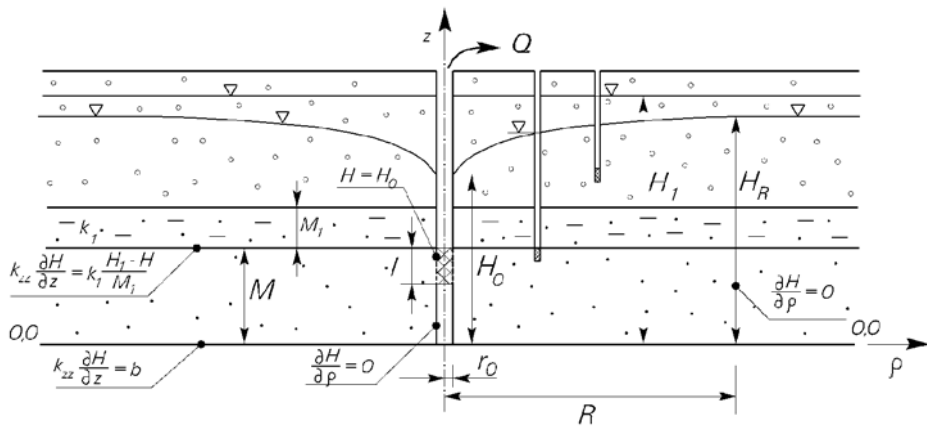
Rozwiązanie równania dopływu do studni może być aproksymowane numerycznie, przy zastosowaniu metody różnic skończonych, metody elementów skończonych, metody elementów brzegowych (Wosiewicz, Sroka, 1992), metody wirów. Zastosowanie metody różnic skończonych do obliczeń dopływu do studni przy wykorzystaniu równania (1) wymaga gęstej siatki dyskretyzacyjnej. Pomimo tego dokładność uzyskanego rozwiązania jest ograniczona. Przykładem rozwiązania dopływu do studni w dwuwarstwowym układzie wodonośnym jest praca (Haładus i in., 1995), gdzie w samym tylko ujmowanym poziomie dokonano podziału na ponad 3000 bloków. Zastosowanie specjalistycznych programów do obliczeń filtracyjnych, bazujących na równaniu (1) i metodzie różnic skończonych, np. ModFlow również wymaga gęstej siatki, a dokładność obliczeń jest ograniczona.

Wykorzystanie metody różnic skończonych do rozwiązania numerycznego równania (2) pojedynczej studni jest lepszym rozwiązaniem, lecz i w tym przypadku wymaga to zastosowania stosunkowo gęstej siatki, a dokładność rozwiązania jest również ograniczona. Ograniczenie dokładności wiąże się z charakterem zmienności wysokości hydraulicznej w funkcji drogi przepływu. W zadaniach dopływu do studni wysokość hydrauliczna zmienia się z odległością od osi studni r w sposób krzywoliniowy zbliżony lub zgodny z funkcją $\ln r$. W związku z tym można się spodziewać, że w układzie współrzędnych logarymiczno-walcowym zmienność wysokości hydraulicznej będzie zbliżona do liniowej, co powinno prowadzić do uzyskania bardzo dokładnych wyników rozwiązań numerycznych. Stosując relaksacyjną metodę obliczeń liczba koniecznych iteracji również powinna być istotnie mniejsza.

2. Sformułowanie zadania dopływu wody do studni

Celem weryfikacji sposobu obliczeń dopływu do studni przy zastosowaniu metody różnic skończonych w układzie logarymiczno-walcowym rozwiązano dopływ do studni niedogłębionej zasilanej przez spąg i strop warstwy wodonośnej w warunkach przepływu ustalonego (rys. 1). Przy założeniu, że w płaszczyźnie poziomej współczynnik filtracji ma wartość k_{rr} oraz przepływ jest osiowo-symetryczny dopływ do takiej studni opisuje równanie (2). W logarymiczno-walcowym układzie współrzędnych (ρ, φ, z) gdzie $\rho = \ln r$ przyjmuje ono postać:

$$k_{rr} \frac{1}{e^{2\rho}} \frac{\partial^2 H}{\partial \rho^2} + k_{zz} \frac{\partial^2 H}{\partial z^2} = 0 \quad (3)$$



Rysunek 1. Schemat studni z warunkami brzegowymi na granicy drenowanej warstwy wodonośnej

Figure 1. Scheme of a well with boundary conditions on the border of drained aquifer

Zadanie dopływu wody do studni rozwiązano przyjmując następujące warunki brzegowe:

- na spągu warstwy wodonośnej $k_{zz} \frac{\partial H}{\partial z} = b$ (przy występowaniu granicy nieprzepuszczalnej $b = 0$, tj. $\frac{\partial H}{\partial z} = 0$),
- w stropie warstwy wodonośnej $k_{zz} \frac{\partial H}{\partial z} = k_1 \frac{H_1 - H}{M_1}$ (wielkość zasilania zależy od wytworzonej depresji - jeśli współczynnik filtracji $k_1 = 0$, to zasilanie wynosi 0 i warunek sprowadza się do $\frac{\partial H}{\partial z} = 0$),
- na granicy filtra studziennego $H = H_0$,
- na granicy zasilania $H = H_R$,
- na granicy z rurą podfiltrową $\frac{\partial H}{\partial \rho} = 0$.

Występujące w warunkach brzegowych symbole oznaczają: k_1 – współczynnik filtracji półprzepuszczalnej warstwy, poprzez którą zasilana jest drenowana warstwa wodonośna; M_1 – miąższość warstwy półprzepuszczalnej; H_1 – wysokość hydrauliczną w warstwie wodonośnej, z której następuje dopływ wody do warstwy drenowanej; H_0 – wysokość hydrauliczną w studni; H_R – wysokość hydrauliczną na granicy zasilania.

3. Opis rozwiązania zadania

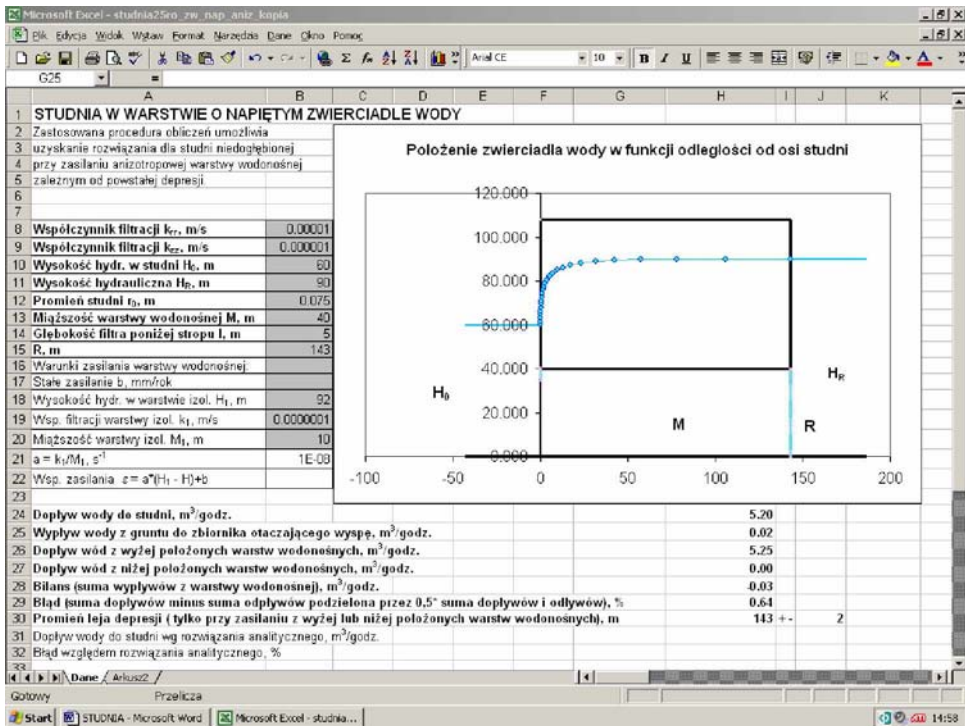
Dopływ do studni rozwiązano numerycznie metodą różnic skończonych w arkuszu kalkulacyjnym Excel, bazując na równaniu (3) i przedstawionych wyżej warunkach brzegowych. Do rozwiązania przyjęto niewielkiej gęstości siatkę 24 na 25 elementów.

Wzdłuż osi z przyjęto długość bloku $\Delta z = \frac{M}{24}$, gdzie M oznacza miąższość warstwy

wodonośnej, natomiast wzdłuż osi ρ długość bloku $\Delta \rho = \frac{\ln R - \ln r_0}{25}$, gdzie: R – promień granicy zasilania; r_0 – promień studni.

Isota obliczeń polega na wpisaniu w Excelu odpowiednich równań różnicowych i rozwiązaniu powstałego układu równań. Rozwiązanie układu równań jest wykonywane metodą relaksacji i sprowadza się do przeprowadzenia zadeklarowanej liczby iteracji. Procedura obliczeń jest bardzo prosta. Polega ona na wprowadzeniu danych, tj. wpisaniu w polach zaznaczonych kolorem szarym (rys. 2) wartości współczynników filtracji k_{rr} i k_{zz} , wysokości hydraulicznej na granicy zasilania H_R , wysokości hydraulicznej w studni H_0 i głębokości zafiltrowania l . W przypadku stałego zasilania warstwy wodonośnej przez strop lub spąg warstwy wodonośnej wpisuje się tę wartość jako wielkość b . Jeśli wartość

zasilania warstwy wodonośnej zależy od wytworzonej w niej depresji, należy wpisać wartość współczynnika filtracji „półprzepuszczalnej” warstwy k_1 , jej miąższość M_1 oraz wysokość hydrauliczną H_1 w warstwie wodonośnej, z której następuje dopływ wody. W wyniku przeprowadzenia iteracji uzyskuje się rozwiązanie zadania. W metodzie tej dokładność rozwiązania zależy od liczby iteracji. Z kolei liczba iteracji zależy w dużym stopniu od wartości promienia zasilania. Im promień jest mniejszy, tym szybciej uzyskuje się końcowe rozwiązanie (zbieżność rozwiązania jest lepsza). Dlatego też w niektórych przypadkach wskazane jest wykonywanie obliczeń dla zadanych warunków przepływu przyjmując niewielką wartość promienia, a następnie zwiększając ją stopniowo do właściwej wartości.



Rysunek 2. Przykładowe wyniki obliczeń dopływu do studni za pomocą arkusza kalkulacyjnego Excel

Figure 2. Examples of the calculation results of groundwater flow into the well by the use of Excel spreadsheet

Po wykonaniu iteracji stworzona w Excelu procedura obliczeń umożliwia uzyskanie:

- dopływu wody do studni,
- wielkości bocznego zasilania warstwy wodonośnej w odległości R ,
- wielkości dopływu wody z niżej i wyżej położonych warstw wodonośnych,

- bilansu dopływów do warstwy wodonośnej i
- błędu obliczeń.

W przypadku zasilania warstwy wodonośnej z wyżej lub niżej położonych warstw wodonośnych można określić wartość promienia leja depresji. Procedura oznaczania polega na wstawianiu wartości promienia leja depresji R i porównywaniu wielkości przepływu przez pobocznice walca o takim właśnie promieniu R . Jeśli przepływ przez pobocznice będzie wynosił w przybliżeniu zero to wstawiona wartość oznacza promień leja depresji. Program ułatwia wyszukiwanie poprzez wyświetlanie informacji, czy wstawiony wcześniej promień należy zwiększyć czy też zmniejszyć.

Opracowany program umożliwia również określenie współczynnika filtracji. Należy w tym celu tak dobrać k , aby wydatek Q był zgodny z uzyskanym wydatkiem studni. W przypadku zasilania warstwy wodonośnej przez strop i spąg należy jednocześnie tak dobrać R aby stanowił on promień leja depresji.

4. Wyniki przeprowadzonych testów i wnioski

Przedstawiony wyżej, numeryczny sposób obliczeń dopływu wody do studni w układzie logarytmiczno-walcowym poddano testowaniu. Testowanie polegało na wykonaniu obliczeń za pomocą programu w arkuszu kalkulacyjnym Excel. Testami objęto dopływy wody do studni dogłębionej i niedogłębionej dla następujących warunków zasilania warstwy wodonośnej:

- bocznego zasilania (przez pobocznice walca),
- stałego zasilania warstwy wodonośnej (stała prędkość dopływu wody) przez strop lub spąg warstwy wodonośnej,
- zasilania warstwy wodonośnej przez strop lub spąg zależnego od wielkości depresji wywołanej drenażem (przesączanie z wyżej lub niżej położonych warstw wodonośnych),
- różnych, wyżej wymienionych kombinacji zasilania.

W wyniku przeprowadzonych testów sformułowano następujące wnioski:

- 1) Numeryczne rozwiązanie zadania dopływu do studni w logarytmiczno-walcowym układzie współrzędnych jest bardzo efektywne. Niewielka gęstość siatki dyskretyzacyjnej powoduje, że uzyskuje się bardzo wysoką dokładność obliczeń przy stosunkowo niewielkiej liczbie iteracji. Przykładowo dla studni dogłębionej zasilanej bocznie (rozwiązanie Dupuit) lub przez strop i spąg warstwy ze stałą wartością b , siatka 24×25 węzłów pozwala na uzyskanie wielkości dopływu z błędem poniżej 0,01% w porównaniu z rozwiązaniem teoretycznym.
- 2) W przypadku studni niedogłębionych można uzyskać dużą dokładność obliczeń. Świadczy o tym bilans dopływów do warstwy wodonośnej, który w miarę wzrostu liczby iteracji dąży do zera (jeśli węzeł siatki wypada dokładnie na granicy filtra).

- 3) Zastosowana procedura obliczeń, przy zasilaniu warstwy wodonośnej przez strop lub spąg zależnym od wywołanej depresji pozwala na uzyskanie dostatecznej dokładności obliczeń. Maksymalne błędy w bilansie dopływów do warstwy wodonośnej nie przekraczają w tym przypadku kilku procent.
- 4) Program do testowania napisany został w ogólnodostępnym arkuszu kalkulacyjnym Excel. Sposób obliczeń jest bardzo prosty. Polega on na wpisaniu odpowiednich danych i uruchomieniu procedury iteracyjnej. Arkusz ten może służyć do określania właściwości hydrogeologicznych warstw wodonośnych w warunkach przepływu ustalonego do studni wykonanej w warstwie o napiętym zwierciadle wody, a w szczególności dopływu do studni niedogłębionej i występowania właściwości ortotropowych skały, przy zasilaniu drenowanej warstwy wodonośnej z wyżej i niżej położonych warstw. W wyniku obliczeń przedstawiony jest również bilans dopływu do warstwy wodonośnej oraz generowane są wykresy położenia zwierciadła wody i spadków hydraulicznych w zależności od odległości od osi studni. Program, stanowiący plik o nazwie *studnia zw nap.xls*, udostępniony jest nieodpłatnie na stronie internetowej www.ig.pwr.wroc.pl/zaklady/ZGiWM.

Literatura

- Dąbrowski S., Górski J., Kapuściński J., Przybyłek J., Szczepański A., 2004, *Metodyka określania zasobów eksploatacyjnych zwykłych wód podziemnych poradnik metodyczny*, Warszawa, „Borgis” Wydawn. Medyczne, ISBN 83-85664-92-X.
- Ferris J.G., Knowles D.B., Brown R.H., Stallman R.W., 1989, *Theory of aquifer tests*, Washington.
- Franke O.L., Reilly T.E., Bennett G.D., 1987, *Definition of boundary and initial conditions in the analysis of saturated ground-water flow systems an introduction*, Washington.
- Haładus A., Kulma R., Szczepański A., 1995, *Udział wód z przesączania w wydajności studni*, Wspólcz. Problemy Hydrogeol. Kraków-Krynica.
- Kasztelan D., Przybyłek J., 2005, *Program Aquifer Test jako narzędzie do analizy wyników próbnego pompowania*, Wspólcz. Problemy Hydrogeol., Toruń.
- Röhrich T., and Waterloo Hydrogeologic, Inc., 2001, *User's Guide for Aquifer Test*.
- Wosiewicz B., Sroka Z., 1992, *Komputerowe obliczenia filtracji dla budownictwa wodno-melioracyjnego*, Warszawa, Wyd. Nauk.-Techn., ISBN 83-204-1517-9.