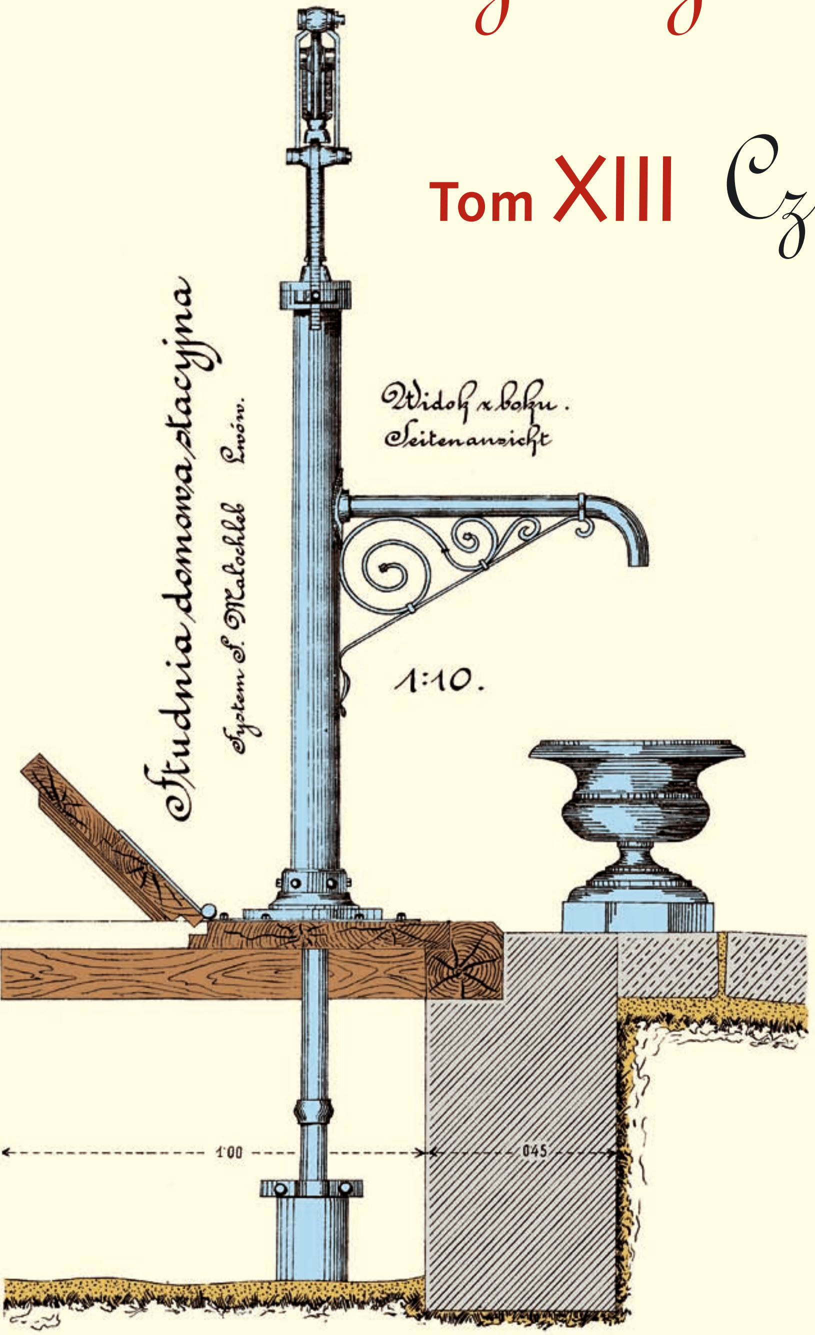
# Współczesne problemy hydrogeologii

## Tom XIII Część 3.



Wydanie publikacji zostało sfinansowane przez
Narodowy Fundusz Ochrony Środowiska
i Gospodarki Wodnej

Recenzenci:
Jadwiga Szczepańska
Wojciech Ciężkowski
Józef Górski
Andrzej Kowalczyk
Ewa Krogulec
Grzegorz Malina
Jerzy Małecki
Marek Marciniak
Jacek Motyka
Marek Nawalany
Jan Przybyłek
Andrzej Różkowski
Andrzej Sadurski
Andrzej Szczepański
Stanisław Staśko
Stanisław Witczak
Andrzej Zuber

Redakcja: Andrzej Szczepański, Ewa Kmiecik, Anna Żurek

Teksty artykułów w częściach 2. i 3. zostały wydrukowane z wersji elektronicznej dostarczonej przez Autorów, metodą bezpośredniej reprodukcji (*camera ready*)

Projekt okładki i stron tytułowych: Andrzej Tomaszewski

Na okładce: fragment projektu studni miejskiej we Lwowie z 1906 roku
— ze zbiorów prof. **Antoniego S. Kleczkowskiego** (1922–2006)

Korekta: Zespół

Skład komputerowy systemem TeX: pre**TeX**t, www.pretext.com.pl

Druk: ROMA-POL, www.romapol.pl

ISBN-13 978-83-88927-16-4

Marek Rogoż

# Podstawy stochastycznego opisu filtracji wód podziemnych

## Principles of the Stochastic Description of Groundwater Flow

**Słowa kluczowe** hydrogeologia, filtracja, wody podziemne, metody stochastyczne

**Key words** hydrogeology, seepage, groundwater, stochastic methods

**Abstract** Geological conditions of subsurface groundwater flow are very variable in time and space, therefore the parameters of water-bearing formations are in reality random variables. Stochastic methods of mathematical interpretation are the best tools to deal with such variables in hydrogeological calculations. The general conception of stochastic approach to random variables depending on time or space has been presented in the paper, as well as the way of decomposition the random variables into mean values and perturbations. The use of this decomposition has been shown on the examples of one- and two-dimensional differential equations of groundwater flow.

## Wprowadzenie

Filtracja wód podziemnych opisywana jest najczęściej za pomocą równań różniczkowych cząstkowych drugiego rzędu, w których zakłada się, że zarówno współczynniki równań, jak i warunki początkowe i brzegowe są znane i jednoznacznie określone w przestrzeni i w czasie. Tak postawione zagadnienia określane są jako deterministyczne. Deterministyczne równania różniczkowe są szeroko stosowane w praktyce do przybliżonego opisu sytuacji i procesów zachodzących w przyrodzie. W rzeczywistości jednak zmienność warunków filtracji w czasie i przestrzeni zmienia się losowo, dlatego chcąc bardziej wiernie odwzorować warunki naturalne filtracji wód podziemnych, konieczne jest posłużenie się metodami probabilistycznymi, do których należy losowa zmienność warunków filtracji w czasie, określana jako proces stochastyczny oraz zmienność w przestrzeni – opisywana jako pole losowe.

Rozwiązania oparte na deterministycznym traktowaniu zagadnień filtracji wód podziemnych obarczone są zazwyczaj znacznymi, choć bliżej nieokreślonymi błędami. Warunki geologiczne, od których zależą właściwości hydrauliczne górotworu, są bowiem w rzeczywistości bardzo zmienne w przestrzeni. W szczególności przepuszczalność pozornie jednorodnych utworów wodonośnych zmienia się niejednokrotnie w granicach kilku rzędów wielkości. W warunkach nienasyconych przepuszczalność gruntu może się zmieniać nie tylko w przestrzeni, lecz także w czasie. Dostępne informacje o warunkach filtracji wód podziemnych są na ogół tak skąpe i rozproszone, że rzeczywisty rozkład właściwości hydraulicznych ośrodka jest wysoce niepewny. W tej sytuacji tradycyjne, ilościowe traktowanie filtracji wód podziemnych, oparte na analitycznych lub numerycznych rozwiązaniach równań różniczkowych cząstkowych, w których współczynniki lub parametry uważane są za znane, jest zazwyczaj dalekie od rzeczywistości.

Wprowadzając do klasycznych równań różniczkowych filtracji parametry utworów wodonośnych jako zmienne losowe, otrzymuje się losowe lub stochastyczne równania różniczkowe cząstkowe. Opis matematyczny tego rodzaju zagadnień wymaga zastosowania metod analizy procesów stochastycznych oraz pól losowych.

Przez proces stochastyczny rozumie się zmienną losową zmieniającą się nieregularnie w czasie. Zmienna losowa zmieniająca się nieregularnie w przestrzeni wielowymiarowej określania jest jako pole losowe.

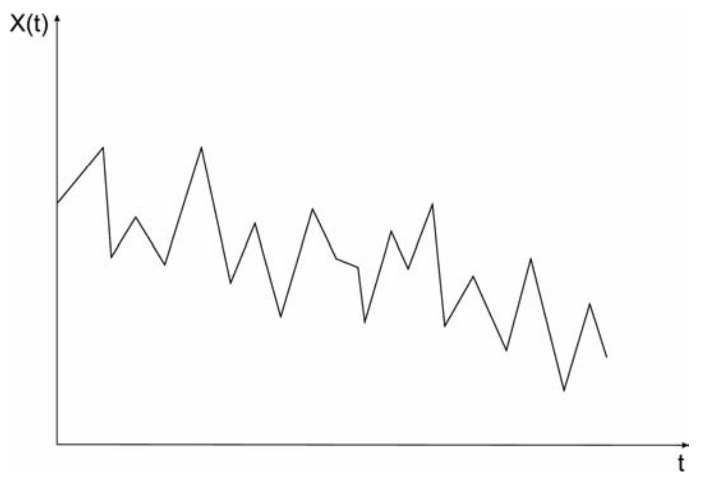
Opisy deterministyczne filtracji wód podziemnych opierają się zazwyczaj na średnich wartościach parametrów. W rozwiązaniach stochastycznych oprócz wartości średnich konieczna jest ocena stopnia zmienności prognozowanej wielkości. Zmienność ta charakteryzowana jest zazwyczaj za pomocą kowariancji obliczanej dla sąsiednich punktów czasu lub przestrzeni rozmieszczonych w odstępach określonych dla przyjętej skali.

W analizie zmienności warunków filtracji wód podziemnych niezmiernie ważną rolę gra skala, w jakiej zmienność ta zachodzi. Każdy schemat mający na celu ilościowe ujęcie wyników zmienności w czasie lub przestrzeni musi tę skalę brać pod uwagę. Skala zmienności współczynnika filtracji może wynosić od ułamka do wielu metrów na dobę, a zmienność w czasie – okres liczony w godzinach, dniach lub latach. Dla ujęć wód podziemnych analizuje się prognozy w skali dziesiątek lat, natomiast w analizach środowiskowych, takich jak składowanie odpadów radioaktywnych, skala czasowa analizy może wynosić nawet tysiące lat. Zachodzi zatem potrzeba możliwie wiarygodnej ekstrapolacji stosunkowo ograniczonej liczby lokalnych obserwacji do opisu dominujących efektów w systemie filtracji wód podziemnych w dużej skali.

Począwszy od wczesnych lat osiemdziesiątych ukazała się ogromna liczba publikacji dotyczących zastosowań metod stochastycznych w zagadnieniach filtracji wód podziemnych. Generalnie publikacje te są trudne do czytania i zrozumienia dla osób nie mających wprawy w posługiwaniu się stosowanymi w tych zagadnieniach metodami matematycznymi. W niniejszym referacie, opierając się na pracy Gelhara (1993), przedstawiono w zarysie podstawy stochastycznego traktowania zagadnień filtracji wód podziemnych, nie wchodząc w metodykę rozwiązywania stochastycznych równań różniczkowych. Bardziej szczegółowe omówienie tych zagadnień można znaleźć w licznych pracach podstawowych z tego zakresu publikowanych głównie na łamach Water Resorces Research, a w szczególności w pracach Dagana (1989), Gelhara (1993), Zhanga (2002) i innych.

## Procesy stochastyczne

Procesy stochastyczne służą do charakteryzowania zjawisk zmieniających się nieregularnie w czasie. W sensie matematycznym przez proces stochastyczny rozumie się zbiór wszystkich możliwych zapisów zmienności obserwowanej wielkości w czasie. W większości przypadków do dyspozycji jest jednak tylko jedna obserwacja zmienności danego zjawiska w czasie. Taki konkretny zapis określany jest jako realizacja procesu stochastycznego. Na rysunku 1 pokazano koncepcję realizacji procesu stochastycznego.




**Rysunek 1.** Przykład realizacji procesu stochastycznego
***Figure 1.*** *Example of realization of a stochastic process*

Proces stochastyczny zdefiniowany jest jako zmienna losowa w każdym punkcie czasowym $X(t)$, zatem istnieje funkcja gęstości prawdopodobieństwa tej zmiennej $f(x, t)$, na podstawie której można obliczyć średnią $\mu(t)$ i wariancję procesu $\sigma^2(t)$:

$$\mu(t) = E[X(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x,t)\,dx \tag{1}$$

$$\sigma^2(t) = E\left\{[X(t) - \mu(t)]^2\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} [x - \mu(t)]^2 f(x,t)\,dx \tag{2}$$

W przypadku ogólnym zarówno średnia, jak i wariancja procesu stochastycznego może być zmienna w czasie. Ponadto, proces stochastyczny w rzeczywistości obejmuje nieokreślenie wielką liczbę zmiennych losowych związanych z każdym punktem czasowym w ciągłym obszarze czasu. Kompletny opis probabilistyczny procesu stochastycznego musi uwzględniać wzajemne powiązania między zmiennymi losowymi odpowiadającymi procesowi stochastycznemu w różnych punktach czasowych. Charakteryzuje się go za pomocą momentów pierwszego i drugiego rzędu, to jest średniej i kowariancji.

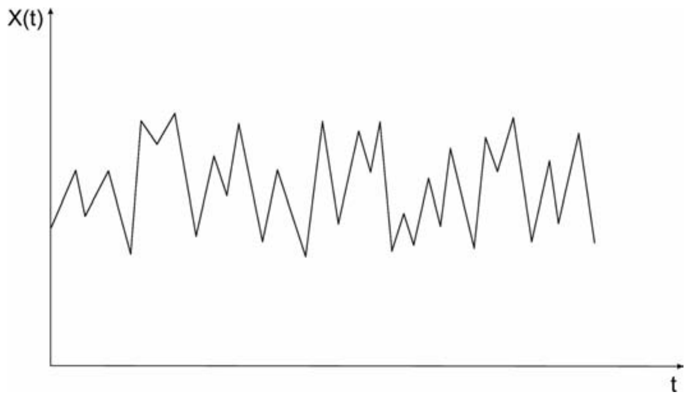
W zastosowaniach praktycznych mamy do czynienia z ograniczoną liczbą zmiennych losowych rozmieszczonych w pewnych odstępach na osi czasu. Celem uproszczenia zapisu oznaczmy zmienne losowe w punktach czasu $t_1$ i $t_2$ przez $X_1$ i $X_2$ oraz odpowiadające im wartości średnie przez $\mu_1$ i $\mu_2$. Wartość średnia określona jest wzorem (1) a kowariancja zmiennych $X_1$ i $X_2$ może być zapisana w postaci

$$\operatorname{cov}(X_1, X_2) = E[(X_1 - \mu_1)(X_2 - \mu_2)] = R(t_1, t_2) \tag{3}$$

Kowariancja dostarcza informacji na temat korelacji między sąsiednimi punktami czasowymi. Należy zauważyć, że gdy $t_1 = t_2$, równanie (3) określa wariancję, która może być funkcją czasu. Opis pierwszego i drugiego momentu procesu stochastycznego stanowi jego pełną charakterystykę, pod warunkiem, że proces jest łącznie normalny.

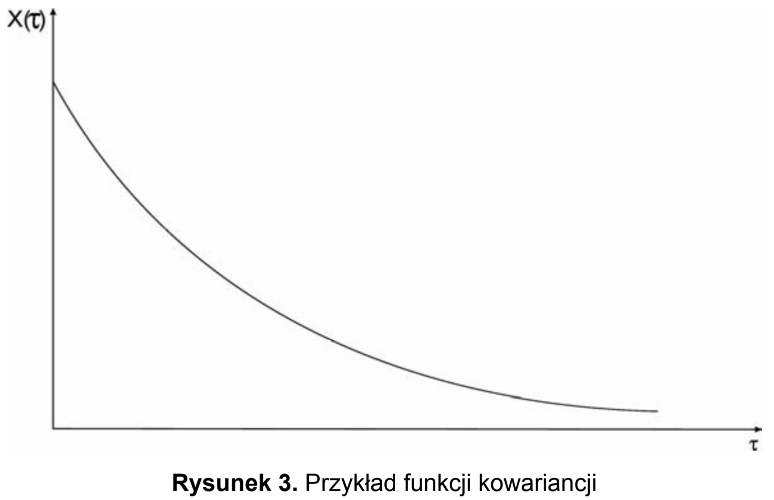
Proces stochastyczny można badać na różnych odcinkach czasu i przy różnych odstępach między analizowanymi punktami czasowymi. Proces, którego rozkłady gęstości prawdopodobieństwa zmiennej losowej są niezależne od przyjętego początku czasu, a zależą jedynie od odstępu między punktami czasowymi $\tau = t_1 - t_2$ nazywa się stacjonarnym procesem stochastycznym (stacjonarnym w węższym sensie).

Należy zauważyć, że jeżeli średnia jest znana, można ją po prostu odjąć od $X$ i zastosować warunek stacjonarności do wynikowego procesu o średniej równej zero. Pojęcie stacjonarności jest ważną cechą, ponieważ jeżeli występuje, wynika z niej pewnego rodzaju powtarzalność w procesie, wskutek czego interpretacja statystyczna może się opierać na analizie pojedynczej realizacji.




**Rysunek 2.** Realizacja stacjonarnego procesu stochastycznego
***Figure 2.*** *Realization of a stationary stochastic process*

W przypadku zjawiska ciągłego obserwuje się zazwyczaj wysoką korelację między blisko siebie usytuowanymi punktami, natomiast gdy odległość lub opóźnienie wzrasta, korelacja maleje. Przykładowy wykres funkcji kowariancji pokazano na rysunku 3.




**Rysunek 3.** Przykład funkcji kowariancji
***Figure 3.*** *Example of a covariance function*

## Pola losowe

Właściwości hydrauliczne utworów wodonośnych a także warunki hydrogeologiczne, takie jak wysokość hydrauliczna, wilgotność, jakość wody mogą się zmieniać zarówno w czasie, jak i w przestrzeni. W przypadku zmienności analizowanej w przestrzeni jednowymiarowej, np. w pojedynczym otworze wiertniczym, tego rodzaju zmiany mogą być opisywane analogicznie jak wyżej omówione procesy stochastyczne z odpowiednio zmienionymi oznaczeniami. Jednakże w naturze mamy zwykle do czynienia ze zmiennością we wszystkich kierunkach, dlatego opis statystyczny musi często uwzględniać zmienność w przestrzeni trójwymiarowej.

Proces stochastyczny wielowymiarowy zwany jest polem losowym $Y(\mathbf{x})$, gdzie $\mathbf{x}$ jest wektorem o składowych $x_i$, $i = 1, 2, ..., n$, przy czym $n$ może oznaczać 1, 2 lub 3 współrzędne przestrzenne. Pole losowe jest zmienną losową dla ustalonego $\mathbf{x}$ i jest kompletnie określone przez jej łączną funkcję gęstości prawdopodobieństwa.

Załóżmy, że po odjęciu średniej pola losowego mamy do czynienia z polem losowym o zerowej średniej, którego funkcja kowariancji ma postać

$$R_{yy}(\mathbf{x},\mathbf{s}) = E[Y(\mathbf{x}+\mathbf{s})Y(\mathbf{x})] \tag{4}$$

gdzie $\mathbf{s}$ jest wektorem odstępu o składowych $s_1$, $s_2$ i $s_3$.

Kowariancja jest na ogół funkcją $\mathbf{x}$ i $\mathbf{s}$, jeżeli jednak przyjmiemy warunek, że zmienność zjawiska nie zależy od położenia w przestrzeni, to kowariancja będzie zależała tylko od długości wektora odstępu między punktami w przestrzeni. Warunek ten określany jest jako jednorodność statystyczna, będąca odpowiednikiem stacjonarności procesu stochastycznego.

Jednorodne pole losowe jest statystycznie izotropowe, jeżeli kowariancja zależy tylko od odstępu między punktami przestrzeni a nie od orientacji wektora odstępu, natomiast gdy kowariancja zależy zarówno od długości, jak i orientacji wektora odstępu $\mathbf{s}$, pole losowe jest anizotropowe.

## Stochastyczne równania różniczkowe

W hydrogeologii często mamy do czynienia ze stochastycznymi równaniami różniczkowymi, w których mogą występować losowe warunki początkowe lub brzegowe, losowe niejednorodności i losowe współczynniki. Celem pokazania sposobu podejścia do rozwiązywania stochastycznych równań różniczkowych rozważmy równanie w postaci

$$\frac{dX}{dt} = -AX + Y \tag{5}$$

Jeżeli $A$ jest stałą, jest to stochastyczne równanie różniczkowe z losową częścią niejednorodną. Przybliżone rozwiązanie tego równania można uzyskać, wyrażając $X$ i $Y$ jako ich wartości oczekiwane plus zakłócenia o zerowej średniej, to jest:

$$\begin{aligned} X &= \overline{X} + x, \qquad E[X] = \overline{X}, \qquad E[x] = 0 \\ Y &= \overline{Y} + y, \qquad E[Y] = \overline{Y}, \qquad E[y] = 0 \end{aligned} \tag{6}$$

Stosując tę dekompozycję do równania (5), otrzymuje się

$$\frac{d\overline{X}}{dt} + \frac{dx}{dt} = -A\overline{X} - Ax + \overline{Y} + y \tag{7}$$

skąd można otrzymać równanie opisujące średnią

$$\frac{d\overline{X}}{dt} = -A\overline{X} + \overline{Y} \tag{8}$$

oraz, gdy od równania (7) odejmiemy równanie średniej, otrzymamy równanie zakłóceń o zerowej średniej

$$\frac{dx}{dt} + Ax = y \tag{9}$$

Równanie średniej (8) można traktować jak zwykłe deterministyczne równanie o znanej wartości oczekiwanej $Y$. Dla równania zakłóceń (9) istnieje kilka metod rozwiązania, których omawianie przekroczyłoby możliwości referatu. Zainteresowani proszeni są o sięgnięcie do wyżej cytowanej literatury źródłowej.

## Przykład jednowymiarowego stochastycznego równania filtracji

Dla zilustrowania sposobu rozwiązywania stochastycznych równań różniczkowych filtracji wód podziemnych, rozważmy najprostszy przypadek jednowymiarowej filtracji ustalonej w obszarze niejednorodnym, którego podstawowe równanie różniczkowe ma postać

$$\frac{d}{dx}\left(k\frac{dH}{dx}\right) = 0 \tag{10}$$

Przy założeniu, że wydatek jednostkowy $q$ jest znany na podstawie niezależnych pomiarów, równanie to po scałkowaniu można zapisać w postaci

$$\frac{dH}{dx} = -qk^{-1} \tag{11}$$

Współczynnik filtracji $k$ można zastąpić jego odwrotnością $W$, będącą miarą oporu hydraulicznego. Zarówno wysokość hydrauliczną, jak i opór można rozdzielić na wartość oczekiwaną (średnią) i zakłócenie losowe o zerowej średniej, to jest:

$$\begin{aligned} H &= \overline{H} + h, \qquad \overline{H} = E[H], \qquad E[h] = 0 \\ 1/k &= \overline{W} + w, \qquad \overline{W} = E[1/k], \qquad E[w] = 0 \end{aligned} \tag{12}$$

Równanie (11) zapisane w kategoriach wartości oczekiwanych ma postać

$$E\left[\frac{dH}{dx}\right] = \frac{d\overline{H}}{dx} = -q\overline{W} \tag{13}$$

Odejmując je od ogólnego równania (11), otrzymuje się równanie opisujące zakłócenia losowe

$$\frac{dh}{dx} = -qw \tag{14}$$

## Przykład stochastycznego równania filtracji dwuwymiarowej

W przypadku dwuwymiarowej filtracji ustalonej, w ośrodku porowatym o współczynniku filtracji niejednorodnym lecz izotropowym, rozkład wysokości hydraulicznej można opisać za pomocą równania

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial H}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial H}{\partial y}\right) = 0 \tag{15}$$

Różniczkując równanie (15) i dzieląc wynik przez współczynnik filtracji, otrzymuje się

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial \ln k}{\partial x}\frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} + \frac{\partial \ln k}{\partial y}\frac{\partial H}{\partial y} = 0 \qquad (k \neq 0) \tag{16}$$

Jak widać, w wyniku różniczkowania współczynnik filtracji został zastąpiony jego logarytmem. Zmienność przepuszczalności jest często wyrażana ilościowo w postaci odchylenia standardowego logarytmu współczynnika filtracji $\sigma_{\ln k}$, które, jak wykazała praktyka, może oscylować od 0,4 do 4. Jeżeli ln *k* jest stały, rozkład wysokości hydraulicznej opisany jest po prostu równaniem Laplace'a. Logarytm współczynnika filtracji ma najczęściej rozkład normalny i zazwyczaj może być kompletnie opisany za pomocą średniej i kowariancji. Jest on ponadto zmienny w znacznie mniejszym zakresie, niż sam współczynnik filtracji. Z wyżej wymienionych powodów korzystne jest stosowanie w równaniach filtracji logarytmu naturalnego *k* zamiast samego *k*. Logarytm ten uważany jest za proces stochastyczny z następującą średnią i zakłóceniem:

$$\ln k = F + f; \quad E[\ln k] = F; \quad E[f] = 0 \tag{17}$$

Stosując tę dekompozycję oraz wyżej omówioną dekompozycję wysokości hydraulicznej na sumę wartości średniej $\overline{H}$ i zakłócenia *h*, otrzymuje się równanie rozkładu średnich wartości wysokości hydraulicznej w postaci

$$\frac{\partial^2 \overline{H}}{\partial x^2} + \frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial \overline{H}}{\partial x} + E\left[\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial h}{\partial x}\right] + \frac{\partial^2 \overline{H}}{\partial y^2} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial \overline{H}}{\partial y} + E\left[\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial h}{\partial y}\right] = 0 \tag{18}$$

Odejmując równanie (18) od oryginalnego równania filtracji (16), otrzymuje się wyrażenie opisujące zakłócenia wysokości hydraulicznej

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial h}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial H}{\partial y} = \\ &\quad = E\left[\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial h}{\partial x}\right] - \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial h}{\partial x} + E\left[\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial h}{\partial y}\right] - \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial h}{\partial y} \cong 0 \end{aligned} \tag{19}$$

Ze względu na obszerność i różnorodność zagadnień hydrogeologicznych, w których metody stochastyczne znajdują zastosowanie oraz konieczność biegłej znajomości zaawansowanych metod matematycznych stosowanych w analizach stochastycznych, przedstawiono jedynie w zarysie sposób podejścia do tych zagadnień. Czytelnicy zainteresowani pogłębioną wiedzą w tym zakresie proszeni są o sięgnięcie do wymienionych wyżej publikacji podstawowych, w których z kolei można znaleźć obszerną bibliografię zastosowań metod stochastycznych i pól losowych w hydrogeologii.

## Literatura

Dagan G., 1989: *Flow and transport in porous media*. Springer Verlag, Heidelberg, Berlin.

Gelhar L.W., 1993: *Stochastic Subsurface Hydrology*. New Jersey, Prentice-Hall, Englewood Cliffs.

Zhang D., 2002: *Stochastic Methods for Flow in Porous Media: Coping with Uncertainties*. San Diego, California, Academic Press.